Revista SÂNDALO

Artigo

O raciocínio algébrico e os padrões figurativos presentes no material tradicional timorense *lafatik*, na formação inicial dos professores de matemática

Algebraic reasoning and figurative patterns present in the traditional Timorese lafatik material, in the initial training of mathematics teachers

Lucia Yeni Wulandari Suharman
Universidade Nacional Timor Lorosa'e
Júlio Maia da Conceição
Universidade Nacional Timor Lorosa'e

Nota sobre o Autor

Declaro não ter conflito de interesses por ter realizado o estudo. Este estudo foi financiado pelos recursos do autor.

Por favor, encaminhe qualquer dúvida sobre este artigo para Lucia Yeni Wulandari Suharman, correio eletrônico: lucia.suharman73@gmail.com

Submetido: 23 outubro 2023
Aceito: 5 abril 2024
Publicado: 19 abril 2024

Resumo

A matemática é considerada como a "ciência dos padrões" (Devlin, 2002; Steen, 1988; Vale, 2013). As várias investigações manifestam a importância do estudo dos padrões figurativos como um contexto rico para desenvolver a atividade matemática, pois permite desenvolver um tipo de raciocínio matemático que auxilia os estudantes a resolver problemas e a desenvolver o raciocínio algébrico (dos Reis, da Silva & dos Santos, 2021; Suharman, 2018; Vale, 2013; Borralho & Barbosa, 2009; Boralho, Cabrita, Plahares & Vale, 2007). As finalidades desse trabalho são analisar o raciocínio algébrico dos estudantes nas resoluções de problemas dos padrões figurativos e analisar as dificuldades que os estudantes manifestaram nos trabalhos sobre o tema. Participaram, nesse estudo, os 25 estudantes do 4.º ano do Curso da Licenciatura em Ensino da Matemática, da Universidade Nacional Timor Lorosa'e. Optou-se por uma metodologia de natureza mista, assumindo um carácter fundamentalmente descritivo. No teste, desenvolvemos as tarefas figurativas como ponto de partida para a generalização dos padrões (um dos aspetos importantes na Álgebra). O envolvimento das figuras de *lafatik* é uma proposta didática para o ensino de padrões, que evidencia algumas das potencialidades desta abordagem para o desenvolvimento do raciocínio algébrico de uma forma prática e motivadora.Na análise dos dados, foi possível compreender a capacidade dos estudantes na: identificação do número de *talitahan* para formar uma figura (88%); identificação de padrão (62%); e identificação da soma de n termos sucessivos da progressão aritmética (44%). Nota-se, também, a dificuldade dos estudantes relativamente ao desenho da figura comparando a ordem e a quantidade. O estudo sugere então a possibilidade dos futuros professores de matemática explorarem pedagogicamente o conhecimento algébrico sobre padrões figurativos, em particular do contexto de Timor, valorizando o raciocínio algébrico dos futuros estudantes.

Palavras Chaves: Raciocínio algébrico, padrões figurativos, formação inicial de professores

Abstract

Mathematics is considered the “science of patterns” (Devlin, 2002; Steen, 1988; Vale, 2013). The various investigations demonstrate the importance of studying figurative patterns as a rich context for developing mathematical activity: it allows them to develop a type of mathematical reasoning that helps them solve problems and develop algebraic reasoning (dos Reis, da Silva & dos Santos, 2021; Suharman, 2018 ; Vale, 2013; Borralho & Barbosa, 2009; Boralho, Cabrita, Plahares & Vale, 2007). The aims of this study are to analyse students' algebraic reasoning in solving figurative pattern problems and to analyse the difficulties that students expressed in their responses on the topic.In this study, 25 students from the 4th year of the Bachelor in Mathematics Teaching, at the Universidade Nacional Timor Lorosa’e, were involved. A mixed methodology is followed, assuming a fundamentally descriptive nature. In the test, figurative tasks are involved as a good starting point for the generalization of patterns (one of the important aspects in Algebra). The involvement of *lafatik* figures is a didactic proposal for teaching patterns, which highlights some of the potential of this approach for developing algebraic reasoning in a natural and motivating way.In data analysis, shows the ability of students to: identify the number of *talitahan* form a figure (88%); pattern identification (62%); and identification of the sum of n successive terms of the arithmetic progression (44%). It is also noted the students' difficulty in drawing the figure, comparing the order and quantity. The study then suggests the need for future mathematics teachers to have algebraic knowledge about figurative patterns, particularly from the context of Timor, valuing algebraic reasoning.

Keywords: Algebraic reasoning, figurative patterns, pre service teacher education

1 Introdução

Várias investigações no âmbito do ensino de Matemática, manifestam as preocupações e os interesses de melhoria do ensino de Álgebra relacionados com: os fenómenos de ensino, os domínios de conceitos e os procedimentos algébricos. Para Socas (2011), a Álgebra tem uma grande presença como conteúdo matemático em diferentes fases do sistema educativo, especialmente, a partir do secundário para a universidade, embora a últimos vinte anos tem havido propostas para incorporar certas questões do raciocínio algébrico (RA) no Ensino Fundamental. Na formação de professores de matemática é importante proporcionar aos futuros professores várias experiências de aprendizagem que podem beneficiar a: observação, análise, e reflexão de situações de ensino e de aprendizagem (Doer, 2004). Daí promovendo o conhecimento para ensinar este tema (Branco & Ponte, 2011). Assim, na formação inicial, é importante que futuros professores reflitam sobre as suas próprias experiências e observações de ensino. Referindo-se ao raciocínio algébrico (RA), a formação inicial necessita atender aos desafios que se colocam no ensino de Álgebra, sendo importante discutir o desenvolvimento do conhecimento do professor respeitando o ensino e a aprendizagem de Álgebra.

Relativamente à investigação no ensino e na aprendizagem de Álgebra, vários autores têm refletido sobre as características da Álgebra escolar e a importância em promover o desenvolvimento do RA nos alunos desde o início da escolaridade (Aké, 2013; Blanton & Kaput, 2005; Branco & Ponte, 2011; Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2004). Outros estudos trabalharam especificamente na caracterização do RA dos alunos no nível elementar e no nível secundário (Godino, Fernandez, Lacasta, Neto, Wilhelmi, Contreras, Aké, Diaz, Estepa, Oliveira & Lasa, 2015; Filloy, Rojano & Puig, 2007; Godino, Aké, Gonzato, e Wilhelmi, 2014). Essa teoria da categorização do RA é considerada como base de analise do desenvolvimento do raciocínio algébrico nesse trabalho.

Os padrões são uma das temáticas importante na matemática. Eles podem ser uma estratégia para a aprendizagem de resolução de problemas e o seu estudo torna possível o desenvolvimento do RA, envolvendo os conceitos de progressão e de função. Na aprendizagem sobre os padrões, a visualização tem um papel importante. Assim, na aprendizagem sobre os padrões é possível desenvolver os conhecimentos dos estudantes sobre: conceitos, ideias e procedimentos matemáticos através de contextos figurativos.

Considera-se a importância dos padrões figurativos na aprendizagem da matemática e de envolvimento no contexto matemático na vida quotidiana, na matemática contextual. Dessa forma, no presente trabalho envolve-se a utilização do *lafatik* nas tarefas apresentadas aos estudantes, futuros professores de matemática. O *lafatik* é uma bandeja timorense e que tem uma forma hexagonal. Além da sua forma hexagonal, o *lafatik* também é constituído pelo conjunto de *tali tahan, folha de palma*[1]*,* que se forma, também, em hexágono. Antigamente, o *lafatik* era formado apenas com *tali tahan* de cor natural de palma, mas atualmente foi modernizado, sendo formado pelo *tali tahan* de várias cores (Suharman, 2018). Nesse estudo, o envolvimento das figuras de *lafatik* é uma proposta didática para o ensino de padrões, que evidencia algumas das potencialidades desta abordagem para o desenvolvimento do raciocínio algébrico de uma forma contextualizada e motivadora.

---

[1] *Borassus flabellifer*

Além disso, acreditamos que os estudos no campo da Etnomatemática, sustentam essa investigação, uma vez que possibilita aos investigadores identificarem a presença da matemática em diferentes culturas e contextos, considerando-se enriquecer o campo de investigação em didática de matemática.

2. Desenvolvimento

Nesta secção apresenta-se uma fundamentação teórica referida ao trabalho relativamente ao raciocínio algébrico (RA) e à aprendizagem de padrões figurativos.

2.1 Raciocínio algébrico

Nos vários estudos sobre esta temática encontram-se dois termos para designar a capacidade de pensar sobre a Álgebra: *Algebraic thinking* - pensamento algébrico (Watson, 2007; Windsor, 2009; Kieran, 2007; Ponte, 2006); e Algebraic reasoning - raciocínio algébrico (Kaput, 1995, 1999; Blanton & Kaput , 2005, 2011; Aké, 2013). Lins (1990, citado por Watson, 2007) menciona que:

> Algebraic thinking was an intentional shift from context (which could be ‘real’, or a particular mathematical case) to structure. Thus ‘algebraic thinking arises when people are detecting and expressing structure, whether in the context of problem solving concerning numbers or some modelled situation, whether in the context of resolving a class of problems, or whether in the context of studying structure more generally (p.8).

Neste sentido, o pensamento algébrico é considerado como uma mudança deliberada do contexto para a estrutura. O contexto pode ser um problema real ou pode ser um determinado problema matemático. O pensamento algébrico surge quando se descobre e declara a estrutura, seja no contexto da resolução de problemas relacionados com números ou com algumas das situações modeladas, ou ainda no contexto da resolução de problemas e no contexto de um estudo mais geral das estruturas.

Encontram-se outros autores que definem o conceito do RA como processo de generalização utilizando-se os exemplos particulares, defendendo a expressão de uma forma geral, por exemplo: Kaput (1995, 1999); Kaput e Blanton (2005). Estes autores afirmam que *“Algebraic reasoning is a process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse of argumentation, and express them in increasingly formal and age-appropriate ways”* (p.99). Neste sentido, o estudante necessita adquirir a capacidade de raciocinar algebricamente para compreender e resolver as tarefas relacionadas com a Álgebra. O RA, na perspectiva da aprendizagem do aluno, realiza-se através de processos de generalização de ideias matemáticas. A partir de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações através de um discurso argumentativo, e expressam-nas, cada vez mais, por caminhos formais e apropriados à ideia.

Kaput (1999) considera que o RA surge quando, através de processos de conjectura e argumentação, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base em situações aritméticas, geométricas, de modelação matemática e em quaisquer outras situações matemáticas leccionadas desde os primeiros anos de escolaridade. O autor propõe cinco facetas para caraterizar o pensamento algébrico: a generalização e formalização de padrões e restrições; a manipulação de formalismos, guiada sintacticamente; o estudo de estruturas abstractas; o estudo de funções, relações e de variação conjunta; a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos.

Na perspetiva da Kieran (2007), a Álgebra não é apenas percebida como um conjunto de procedimentos que envolvem símbolos em forma de letras, mas também como uma atividade de generalização e como um conjunto de ferramentas utilizadas na representação das relações matemáticas, dos padrões e de regras. Deste modo, a Álgebra, além de ser uma técnica, é também uma forma de pensamento e raciocínio sobre as situações matemáticas.

A generalização envolve a análise do que é comum entre várias situações consideradas e a análise de regularidades, procedimentos, estruturas e relações entre as situações as quais se tornam novos objetos, sendo que o foco já não são as situações particulares (Kaput, 1999). Blanton e Kaput (2011) reconhecem que as situações relativas ao RA como:

> Algebraic reasoning as an activity of generalizing mathematical ideas, using literal symbolic representations, and representing functional relationships, all implicit in this task, is no longer reserved for secondary grades and beyond, but is an increasingly common thread in the fabric of ideas that constitute mathematical thinking at the elementary grades (p.6).

Os autores sublinham que a atividade de generalização de ideias matemáticas, usando representações simbólicas literais, e a representação de relações funcionais podem integrar no trabalho dos alunos desde os primeiros anos escolares.

Kaput (2008) apresenta aspectos centrais do RA com base em duas características essenciais do RA (Lins & Kaput, 2004): (1) generalização simbólica de regularidades; (2) raciocínio sintaticamente guiado e ações de generalizações expressas no sistema convencional de símbolos. Estes aspectos são integrados em três vertentes: estudo de estruturas e sistemas; estudo de funções, relações e (co)variação; aplicação de linguagens de modelação, dentro e fora da Matemática.

Godino *et al*. (2015) admitem a importância destas três vertentes para categorizar o RA das atividades dos alunos. Os autores referidos consideram estas três categorias para analisar o conteúdo algébrico no trabalho dos alunos: 1. *Estruturas* (relação de equivalência, propriedades das operações, equações, ...); 2. *Funções* (padrões aritméticos, padrões geométricos, função linear, afim, quadrática, ...); 3. *Modelação* (problemas de contexto que são resolvidos através de equações ou de relações funcionais).

Outros estudos trabalharam especificamente a caracterização do RA dos alunos no nível básico (Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2013) e no nível secundário (Godino et. al., 2015) com enfoque ontossemiótico (EOS). Na teoria do Godino (2009), o EOS é uma abordagem teórica estruturada que visa articular diferentes pontos de vista e definições de conhecimento matemático, seu ensino e aprendizagem. Além disso, é também um sistema teórico para investigação em educação matemática, no que diz respeito a categorias de análise como ferramentas para identificar e classificar o conhecimento necessário para o ensino de matemática e para analisar o conhecimento colocado em jogo pelo professor.

O conceito de EOS (de práticas, objetos e processos) responde à necessidade de identificar os objetos e processos que estão envolvidos e emergem na prática matemática que são mostradas nas resoluções de situações problemas (Godino, et al., 2017). Godino, Batanero e Font (2007), na sua teoria, enfatiza que o objeto e o processo configuração é considerada uma base importante na descrição e análise da atividade matemática:

- Situações problemáticas (aplicações matemáticas extras, exercícios, etc.);
- Elementos linguísticos (termos, expressões, notações, gráficos, etc.) em seus diversos registos (escritos, orais, gestual, etc.);
- Conceitos/definições (introduzidos por definições ou descrições: linha reta, ponto, número, média, função, etc.);
- Propriedades/proposições (declarações sobre conceitos, soluções para situações problemáticas, etc.);
- Procedimentos (algoritmos, operações, cálculo técnicas, etc.);
- Argumentos (afirmações usadas para validar ou explicar proposições e procedimentos, dedutivos ou não).

Os investigadores Godino *et al.,* (2015) propõem um modelo para caracterizar o raciocínio algébrico elementar (RAE) para o ensino básico, em que se distingue quatro níveis de RA, e três níveis para caracterizar os níveis de RA no ensino secundário. Relativamente à definição de níveis de RA este baseia-se em distinções de natureza ontossemiótica: presença de objetos algébricos intensivos (ou seja, entidades de carácter geral ou indeterminado); transformações (operações) aplicadas a esses objetos, as quais são baseadas na aplicação de propriedades estruturais; tipo de linguagem utilizada.

Resumidamente, na tabela 1, apresenta-se a proposta de Godino *et al*. (2015) sobre os níveis de RA:

Tabela 1: Níveis do RA para o ensino básico e o ensino secundário

	Nível	Objetos	Transformações	Linguagem
Raciocínio Algébrico Elementar (RAE) para Ensino Primário	0	- Não envolve nenhum objeto intensivo. - Nas tarefas estruturais podem envolver dados desconhecidos.	Se opera com objetos extensivos	Natural, numérico, icónico, gestual; podendo envolver símbolos que referem aos objetos extensivos, aos dados desconhecidos
	1	- Nas tarefas estruturais podem envolver dados desconhecidos. - Nas tarefas funcionais reconhecem-se o intensivo.	- Nas tarefas estruturais aplicam-se relações e propriedades das operações. - Nas tarefas funcionais calcula-se com objetivo intensivo	Natural, numérico, icónico, gestual; podendo envolver símbolos que referem aos objetos intensivos conhecidos
	2	Envolve indeterminadas variáveis	- Nas tarefas estruturadas são equações da forma $Ax \pm B = C$ - Nas tarefas funcionais gerais é reconhecido mas não operando com variáveis para formas canônicas de expressão.	Simbólico – literal, utilizando para refere aos intensivos reconhecidos, em que ligados às informações do contexto especial e temporal
	3	Envolve indeterminadas variáveis	- Nas tarefas estruturadas são equações da forma $Ax \pm B = Cx \pm D$ - Se opera com as determinadas variáveis.	Simbólico – literal, utilizando de maneira analítica, se refere às informações do contexto.
Raciocínio Algébrico (RA) para Ensino Secundário	4	Variáveis, incógnitas e parâmetros; Famílias de equações e funções (Objeto intensivo com um terceiro grau de generalidade)	Existem operações com variáveis, mas não com os parâmetros	Simbólico - literal; símbolos são usados analiticamente, sem se referir a informações contextuais.
	5	- Variáveis, incógnitas e parâmetros; - Famílias de equações e funções (Objeto intensivo com um terceiro grau de generalidade)	Existem operações com os parâmetros e, portanto, com objetos com um terceiro grau de generalidade	Simbólico - literal; símbolos são usados analiticamente, sem se referir a informações contextuais.
	6	Estruturas algébricas Abstrato (espaços vetoriais, grupos, anéis, ...) Relações binárias Gerais e as suas propriedades (Objeto intensivo com quarto grau de generalidade)	Existem operações com os objetos que formam as partes das estruturas	Simbólico - literal; símbolos são usados analiticamente sem se referir a informações contextuais.

Considera-se que os níveis de RA das atividades matemáticas podem ajudar a tomar consciência sobre os processos de generalização, simbolização, bem como a modelação estrutural, funcional e o cálculo analítico, permitindo assim, a criação de ligações significativas entre pensamento algébrico no ensino primário e secundário. A análise didática centrada no reconhecimento dos objetos e processos do pensamento algébrico, pode ajudar a identificar características de práticas de matemática que podem intervir para aumentar gradualmente o nível de RA da atividade matemática dos alunos.

2.2 Aprendizagem de Padrões Figurativos

A matemática é considerada como a "ciência dos padrões" (Delvin, 2002; Steen, 1988). Os padrões são importantes na matemática não apenas como o objeto para analisar como também, enquanto uma linguagem para expressar a matemática. Reconhece-se a importância dos padrões não apenas por sua existência nas vidas quotidianas, mas também na sua criação da temática na matemática escolar. Na aprendizagem de matemática, os padrões são uma poderosa estratégia de resolução de problemas e o seu estudo toma possível o desenvolvimento de ideias matemáticas fundamentais como a generalização, em que a visualização tem um papel importante (Barbosa & Vale, 2013).

Existe vários estudos que envolvem os padrões na aprendizagem de matemática dos alunos. Os resultados desses estudos indicam que os alunos têm capacidade de: observar, formular conjeturas e explicar, se começarem a trabalhar a partir de casos particulares. Essas ações fazem parte do processo de raciocínio indutivo (Barbosa, 2011; Cañadas & Castro, 2005; Pimentel, 2011, Vale & Pimentel, 2010; Barbosa & Vale, 2013).

No estudo de Barbosa e Vale (2013), a exploração de padrões, particularmente os padrões figurativos, permite construir e aprofundar capacidades e conceitos matemáticos dos alunos. Ainda nesse estudo, a exploração de padrões promove a formulação e justificação de generalizações, facilitando, em particular, a transição da aritmética para a álgebra e o desenvolvimento de capacidades de ordem superior.

Outros estudos identificam vantagens de envolver os padrões figurativos na aprendizagem da matemática. Estas vantagens possibilitam o desenvolvimento dos estudantes nas capacidades visuais, através de contextos figurativos, no desenvolvimento do pensamento algébrico, considerando que, desta forma, no processo de generalização, eles contactam a componente dinâmica da construção conceptual dos objetos e conceitos matemáticos, atribuindo mais facilmente significado às expressões e aos símbolos (Barbosa, 2011; Rivera, 2008; Vale, 2013). Além disso, os padrões podem ser um importante contributo para um ensino da Matemática com qualidade, apelando à curiosidade, à investigação autónoma e ao pensamento crítico dos alunos (Barbosa & Vale, 2013).

No outro lado, O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM,2008) refere que os programas de ensino necessitam habilitar os alunos para compreenderem padrões, relações e funções e para usarem corretamente símbolos algébricos na representação e análise de situações e estruturas matemáticas. Por este motivo, os professores devem criar situações que levem os estudantes a desenvolver o seu raciocínio algébrico. Assim, valorizam-se tarefas para generalizar situações, estudar padrões e relações numéricas (Godino *et al*. 2015a). No desenvolvimento de tarefas matemáticas, sugere-se aos professores usar diagramas ou figuras para facilitar a compreensão dos alunos. Aos processos visuais chama-se *objetos ostensivos* e são normalmente mais concretos e perceptíveis (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco & Contreras, 2015).

A *visualização Matemática* é um processo que permite revelar dados, é também *"um tipo de atividade do raciocínio, capaz de integrar quatro elementos principais, as imagens mentais, as representações externas, os processos de visualização e as habilidades de visualização"* (Góes & Soares, 2010, p. 2). Godino et al. (2015) afirmam que, para o ensino e a aprendizagem da Matemática, é importante recorrer a processos de visualização para construir o raciocínio, sendo estes complementares aos processos de resolução puramente analíticos.

No outro lado, uma aula de matemática desenvolvida através de tarefas desafiadoras que envolvam a exploração de padrões permite construir e ampliar conceitos matemáticos, sobretudo dando significado a esses conceitos, assim como a procedimentos e ideias matemáticas, muitas das vezes aprendidos sem significado e sem relação entre eles, e permite, sobretudo, resolver problemas dentro e fora da matemática (Vale, 2013).

Assim, a Álgebra não é apenas percebida como um conjunto de procedimentos que envolvem símbolos em forma de letras, mas também como uma atividade de generalização e como um conjunto de ferramentas utilizadas na representação das relações matemáticas, dos padrões e de regras (Kieran, 2007).

3 Método

O presente trabalho tem como objetivo analisar o raciocínio algébrico dos estudantes nas resoluções de problemas dos padrões figurativos,bem como as dificuldades que os estudantes manifestaram nos trabalhos sobre o tema. Foca – se na análise das respostas dos 25 estudantes do

4º ano do curso de Licenciatura em Ensino da Matemática, da Universidade Nacional de Timor Lorosa'e. Os estudantes que frequentam este curso são futuros professores de matemática, desde o ensino Pré-Secundário até ao Secundário.

Segue-se uma metodologia mista, envolvendo dados qualitativos e quantitativos no mesmo estudo para responder às perguntas de investigação (Sampieri, Colado & Lucio, 2013; Sousa & Baptista, 2011). A utilização da abordagem quantitativa foi no sentido de permitir uma melhor compreensão do fenómeno em estudo (Coutinho, 2013; Ponte, 2006). Assumiu-se, também, uma metodologia qualitativa de natureza exploratória – descritiva, que envolve a obtenção de dados descritivos, recolhidos no contacto direto do investigador com a situação onde os fenómenos ocorrem naturalmente e onde são influenciados pelo contexto (Bogdan & Biklen, 2013).

Atende-se ao carácter da metodologia qualitativa, a análise de conteúdo que foi utilizada para proceder à descrição e interpretação dos dados, a fim de obter uma caracterização o mais completa possível da situação em estudo e uma melhor compreensão da mesma. A análise de conteúdo, que é uma técnica de investigação que permite fazer uma descrição objetiva, sistemática e quanlitativa do conteúdo manifesto das comunicações, tendo por objetivo a sua interpretação (Carmo & Ferreira, 1998).

Nesse estudo, a análise de conteúdo foi permitir a obtenção de uma descrição qualitativa do conteúdo das respostas dos estudantes através da categorização das respostas.Neste caso utilizamos a categorização da configuração do objetos e processos matemáticos do EOS (Godino, Batanero & Font, 2007) e os níveis de RA para o Ensino Básico e o Ensino Secundário (Godino *et al.*, 2015).

A intenção de procurar uma abordagem mais objetiva e de posicionar os investigadores num lugar neutro com objetivo de diminuir a subjetividade, são as razões de adoção da metodologia quantitativa desta investigação. Neste sentido, o envolvimento do enfoque quantitativo na estudo permite assegurar que a perspetiva dos investigadores é, em alguns momentos, distante (externa) no processo de análise de dados.

4 Resultados

Nesta secção apresenta-se uma descrição e análise das tarefas que se baseia em: soluções esperadas; objetos e processos que se utilizam nas soluções; e o nível de RA.

Quadro 1: Tarefa sobre quantidade de *tali tahan* de flores

Quadro 1 1 (adaptado de Suharman, 2018; 119)

A figura abaixo, mostra o padrão de uma lafatik que é composto por tali tahan branco e tali tahan preto. A primeira flor é formada por 6tali tahan branco e 1 tali tahan preto, a segunda por 10 tali tahan branco e 2 tali tahan preto, e assim sucessivamente. Quantos são os tali tahan brancos e tali tahan pretos necessários para formar 4 flores?

Solução esperada: Nesta tarefa envolve-se a dedução de uma fórmula (expressão designatória de uma função). Trata-se de uma atividade de generalização, em que n é uma variável que representa a posição na sequência identificada a partir do padrão (o domínio da função é constituído por números naturais). Com base na observação das três primeiras flores, preenche-se os seguintes dados:

Tabela 1

Flor	*tali tahan* branco	*tali tahan* preto	Conjunto de *tali tahan*
1ª	$6 = 6 + 4\ \cdot 0$	1	7
2ª	$10 = 6 + 4\ \cdot 1$	2	12
3ª	$14 = 6 + 4\ \cdot 2$	3	17
...	...	...	...
n	$U_n = 6 + 4\ \cdot (n - 1)$ $U_n = 4n + 2$	$U_n = n$	$U_n = (4n + 2) +\ n$ $U_n = 5n + 2$

$U_4\ = ?$

Tali tahan branco $\longrightarrow U_n = 4n + 2$

$$U_4 = 4 \cdot 4 + 2 =\ 18$$

Tali tahan preto ⟶ $U_n\ = n$

$U_4 = 4$. Assim, a 4ª flor constituídas por 18 *tali tahan* brancos e 4 *tali tahan* pretos.

Revista Sândalo, Díli, v.1, N. 1, 2024. DOI: https://doi.org/10.62929/30070716.v1i1.5
Faculdade de Educação, Artes e Humanidades (FEAH)
Universidade Nacional de Timor Lorosa'e (UNTL)
ISSN: 3007-0716

Nível de algebrização. Esta tarefa pretende encontrar as soluções que manifestam o nível 3 de algebrização, que se indica pela alfanumérica de equação e no tratamento de expressão simplificativo na tarefa de progressão. Na resolução desta tarefa, possibilita-se encontrar as dificuldades de analisar o padrão de progressão, e os futuros professores manifestam as soluções do modo de tentativa. Para este caso, categoriza-se no nível 1 de algebrização.

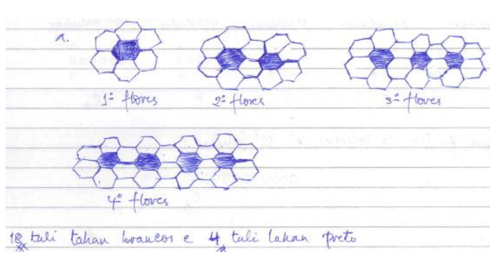
Na seguinte tabela 2 apresenta-se a categorização das respostas dos estudantes relativamenteao grau de correção e ao método de resolução da tarefa 1.

Tabela 2: Grau de correção e método de solução relativamente às respostas dos estudantes na tarefa 1

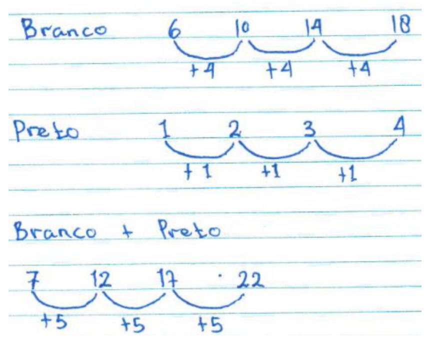
Grau de correção	Método de solução	Frequência	Percentagem %
Resposta Correta	Tendência algébrica	3	12
	Tendência aritmética	1	4
	Observação figura	18	72
Resposta Errada	Tendência algébrica	0	0
	Tendência aritmética	0	0
	Observação figura	3	12
Total		25	100

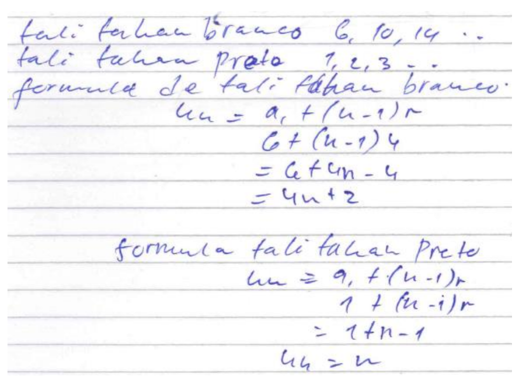
A tabela 2 mostra-se a maioria dos estudantes (88 %) responderam corretamente. Pouco deles envolve-se a Álgebra e a Aritmética na sua resolução e a maioria deles utilizaram uma observação gráfica para resolver a tarefa, como se apresentar no quadro 2:

Quadro 2: Exemplos de resoluções corretas e análise dos níveis de RA relativamente à tarefa 1

Código	Resposta	Observação
A1		**Resposta correta** Nível 0 - Não envolve símbolos algébricos nem soluções algébricas; - Utiliza uma representação de uma figura; - Realiza a contagem para determinar a quantidade de *tali tahan*. ***A configuração da tarefa é raciocínio visual***

Revista Sândalo, Díli, v.1, N. 1, 2024. DOI: https://doi.org/10.62929/30070716.v1i1.5
Faculdade de Educação, Artes e Humanidades (FEAH)
Universidade Nacional de Timor Lorosa'e (UNTL)
ISSN: 3007-0716

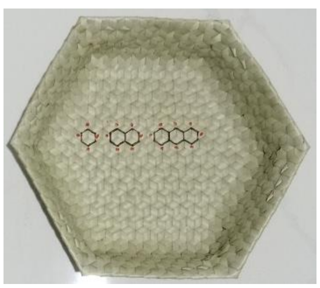
<table>
<tr><td colspan="3">Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e da representação figura; convenções assumidas para identificar os números de tali tahan.
Conceitos: padrão e sequência.
Procedimentos: desenhar as flores sucessivamente e contar os números de cada cor de tali tahan.
Argumentos: baseia-se na contagem de número de tali tahan.</td></tr>
<tr><td>A12</td><td>
</td><td>Resposta correta

Nível 1
- Utiliza linguagem numérica
- Envolve a operação de adição e substração.
- Identifica a relação entre dois números sucessivos
A configuração da tarefa é álgebra operacional</td></tr>
<tr><td colspan="3">Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação da figura.
Conceitos: padrão e sequencia
Proposição: A diferença entre dois termos sucessivos é sempre constante
($b = U_n - U_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$).
Procedimentos:
- determinar a diferença entre dois termos sucessivos;
- identifica que cada termo da sequência obtém-se pela adição do termo anterior com 4 unidades ($U_n - U_{n-1} = 4$, $n \in \mathbb{N}$).
Argumentos: baseia-se na contagem de número de tali tahan.</td></tr>
<tr><td>A24</td><td>
</td><td>Resposta correta
Nível 3
- A linguagem utilizada é simbólica;
- Envolve-se objetos indeterminados ou variáveis
- As fórmulas dadas $6 + 4 \cdot (n-1)$ e n , sofrem transformações por obter a fórmula canónica $5n + 2$
A configuração da resposta é álgebra funcional.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação de figura.
Conceitos: padrão e regularidade e a progressão aritmética.
Proposição:
- propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica.
- diferença entre dois termos sucessivos $b = U_n - U_{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}$
- a fórmula da progressão aritmética $U_n = a + (n-1)b$, sendo a o primeiro termo de sequência (U_1) e b a razão de progressão aritmética.
Procedimentos:
- identificar a diferença entre dois termos sucessivos;</td></tr>
</table>

- identificar o termo geral de progressão aritmética; - Substituir os valores na fórmula da progressão aritmética. Argumentos: baseia-se na progressão aritmética.

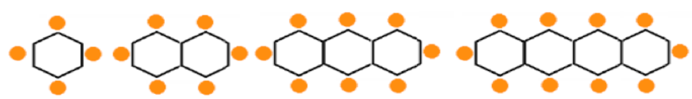
Dos três exemplos diferentes que representam as respostas dos estudantes nesta tarefa (quadro 2), a resposta A foi um exemplo de resposta com construção de figura e contagem de números de *tali tahan* para obter a solução, sem o envolvimento de RA. A resposta B manifesta a utilização da linguagem numérica envolvendo a Álgebra operacional pelas propriedades de adição e de substração. Mesmo assim, não se encontrou nenhum envolvimento do RA. O envolvimento do símbolo algébrico e da operação algébrica manifestam-se na resposta C. O domínio do conceito de progressão aritmética ajuda a resolver esta problema pela identificação da diferença entre os dois termos sucessivos e o envolvimento da fórmula do termo geral da progressão aritmética.

Tarefa 2: Posição de mesas e de cadeiras para uma festa



Tarefa 2

Observe as seguintes figuras sobre o número de mesas (hexágonos) e o número máximo de lugares (círculos) disponíveis em cada etapa. Considere que a sequência de etapas continue, segundo o padrão apresentado. Complete a tabela e determina as funções que corresponde ao número de mesa e ao número de lugares.



Solução esperada: A tarefa 2 é inspirada pela forma hexagonal de *lafatik* e envolve-se uma situação da posição de mesas e de lugares para uma festa. Como a tarefa 1, essa tarefa também envolve-se a dedução de uma fórmula expressão designatória de uma função e a generalização da sequencia dos números de mesas e de cadeira a partir dos padrões. Além disso, possibilita, também, a resolução de tarefa com o envolvimento de Progressão Aritmética (PA), como se apresentar em seguinte registo:

Tabela 3:

Configuração	*Número de mesas*	*Números de lugares*
1	1	4
2	2	6
3	3	8
4	4	10
...	...	...
n	$U_n = n$	$U_n = 2n + 2$

Números de mesa ⟶ $U_n = n$

Números de lugares⟶ se o primeiro termo é 4 e a diferença dos termos sucessivos são 2 por isso pode-se utilizar a formula da PA: $U_n = a + (n-1)b$, sendo a o primeiro termo de sequência (U_1) e b a razão de PA.

$U_n = a + (n-1)b$

$U_n = 4 + (n-1)2$

$U_n = 2n + 2$

Nível de algebrização. Esta tarefa pretende encontrar as soluções que manifestam o nível 3 de algebrização, que se indica pela alfanumérica de equação e no tratamento de expressão simplificativo na tarefa de progressão. Na resolução desta tarefa, possibilita-se encontrar as dificuldades de analisar o padrão de progressão, e os futuros professores manifestam as soluções do modo de tentativa. Para este caso, categoriza-se no nível 1 de algebrização.

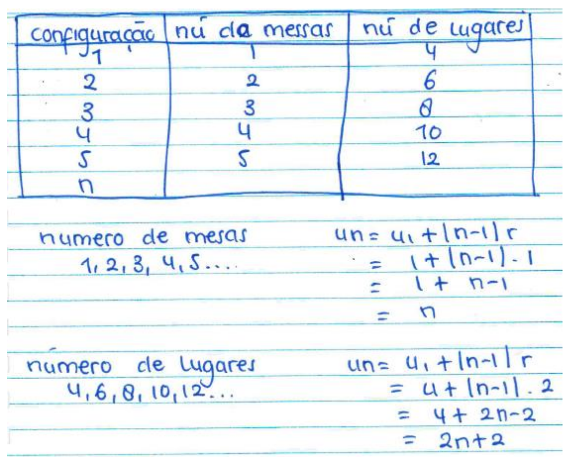
Na seguinte tabela 4 apresenta-se a categorização das respostas dos estudantes relativamente à grau de correção e ao método de resolução da tarefa 2.

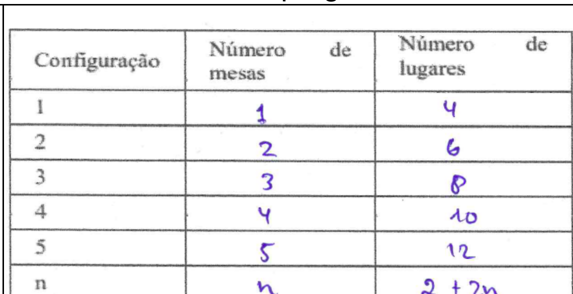
Tabela 4: Grau de correção e método de solução relativamente às respostas dos estudantes na tarefa 2

Grau de correção	**Método de solução**	**Frequência**	**Percentagem %**
Resposta Correta	Tendência algébrica	8	32
	Tendência aritmética	0	0
	Observação figura	10	40
Resposta Errada	Tendência algébrica	0	0
	Tendência aritmética	0	0
	Observação figura	7	28
Total		25	100

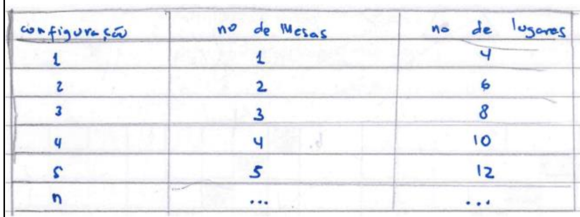
Na tabela 4, mostra-se o envolvimento dos conceitos algébricos (32 %) e da observação de figura (40 %) na resolução de problema da tarefa 2. Encontra-se, ainda, a dificuldades dos alunos na resolução dessa problema é indicado pelo número da resposta errada (7 estudantes). De seguida, apresenta-se os exemplos das respostas dos estudantes relativamente à tarefa 2:

Quadro 3 : Exemplos de resoluções e análise dos níveis de RA relativamente à tarefa 2

<table>
<tr>
<td>A21</td>
<td>
configuração | nú da messas | nú de lugares
1 | 1 | 4
2 | 2 | 6
3 | 3 | 8
4 | 4 | 10
5 | 5 | 12
n | |
numero de mesas
1, 2, 3, 4, 5...
$u_n = u_1 + (n-1)r$
$= 1 + (n-1).1$
$= 1 + n - 1$
$= n$
número de lugares
4, 6, 8, 10, 12...
$u_n = u_1 + (n-1)r$
$= 4 + (n-1).2$
$= 4 + 2n - 2$
$= 2n + 2$</td>
<td>Resposta correta

Nível 3
- A linguagem utilizada é simbólica;
- Envolve-se objetos indeterminados ou variáveis;
- Envolve-se o conceito da progressão aritmética;
A configuração da resposta é raciocínio algébrico.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação de figura.
Conceitos: padrão e regularidade e a progressão aritmética.
Proposição:
- propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica.
- diferença entre dois termos sucessivos $b = U_n - U_{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}$
- a fórmula da progressão aritmética $U_n = a + (n-1)b$, sendo a o primeiro termo de sequência (U_1) e b a razão de progressão aritmética.
Procedimentos:
- identificar a diferença entre dois termos sucessivos;
- identificar o termo geral de progressão aritmética;
- Substituir os valores na fórmula da progressão aritmética.
Argumentos: baseia-se na progressão aritmética.</td>
</tr>
<tr>
<td>A14</td>
<td>
Configuração | Número de mesas | Número de lugares
1 | 1 | 4
2 | 2 | 6
3 | 3 | 8
4 | 4 | 10
5 | 5 | 12
n | n | 2 + 2n</td>
<td>Resposta correta
Nível 1
- Utiliza linguagem numérica;
- Envolve-se a operação de adição para determinar os termos sucessivos;
- Não mostra o envolvimento do conceito da progressão aritmética;
A configuração da resposta é Álgebra operacional.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação da figura.
Conceitos: padrão e sequencia
Proposição: A diferença entre dois termos sucessivos é sempre constante ($b = U_n - U_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$).
Procedimentos:
- determinar a diferença entre dois termos sucessivos;</td>
</tr>
</table>

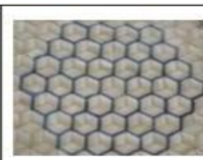
Revista Sândalo, Díli, v.1, N. 1, 2024. DOI: https://doi.org/10.62929/30070716.v1i1.5
Faculdade de Educação, Artes e Humanidades (FEAH)
Universidade Nacional de Timor Lorosa'e (UNTL)
ISSN: 3007-0716

<table>
<tr><td colspan="3">- identifica que cada termo da sequência obtém-se pela adição do termo anterior com 4 unidades ($U_n - U_{n-1} = 4, n \in \mathbb{N}$).
Argumentos: baseia-se na contagem de número de mesas e de lugares.</td></tr>
<tr><td>A8</td><td>
<table>
<tr><th>configuração</th><th>nº de Mesas</th><th>nº de lugares</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>8</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>10</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>12</td></tr>
<tr><td>n</td><td>...</td><td>...</td></tr>
</table></td><td>Resposta errada
Nível 0
- Não envolve símbolos algébricos nem soluções algébricas;
- - Realiza-se a contagem para determinar a quantidade de mesas e de lugares;
- Não consegue de identificar o padrão
A configuração da resposta é raciocínio visual</td></tr>
<tr><td colspan="3">Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e da representação figura; convenções assumidas para identificar os números de mesas e de lugares
Conceitos: padrão e sequência.
Procedimentos: desenhar as mesas sucessivamente e contar os números de mesas e de lugares
Argumentos: baseia-se na contagem de número de mesas e de lugares.</td></tr>
</table>

A resposta A mostra o envolvimento do símbolo algébrico e da operação algébrica. O domínio do conceito de progressão aritmética ajuda a resolver esta problema pela identificação da diferença entre os dois termos sucessivos e o envolvimento da fórmula do termo geral da progressão aritmética. Portanto a resposta A é categorizada no nível 3 do RA. A resposta B envolve a utilização da linguagem numérica da Álgebra operacional pelas propriedades de adição. Mesmo assim, não se encontrou nenhum procedimento de solução algebricamente. A resposta B é categorizado no nível 1 do RA pela realidade de que a resposta não tem o envolvimento do RA.

Relativamente à reposta C, é um exemplo da resposta errada apresentada pelo estudante. Nesse caso, o estudante apenas conseguiu determinar os números de mesas e de lugares sucessivamente pela observação de figuras e não conseguiu identificar os padrões e a fórmula. Por isso é categorizado no nível 0 do RA.

Tarefa 3: Quantidade de hexágonos e losangos

<table>
<tr><td colspan="5">Desenhe o 5º termo e determine a quantidade do hexágono e a quantidade de losangos</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>n</td></tr>
</table>

Solução esperada:

Ainda no sentido de aproveitar a *lafatik,* a tarefa 3 tem o objetivo de avaliar o conhecimento dos estudantes relativamente ao conceito geométrico: hexágono e losango, e ao conhecimento sobre os padrões sobre os números de hexágonos e losangos do 5º termo da lafatik. A resolução dessa tarefa pode ser feita pelo registo da tabela relativamente ao número do hexágono e do losango, considera ainda que um hexágono pode ser feita pela junção de 3 losangos.

Tabela 5:

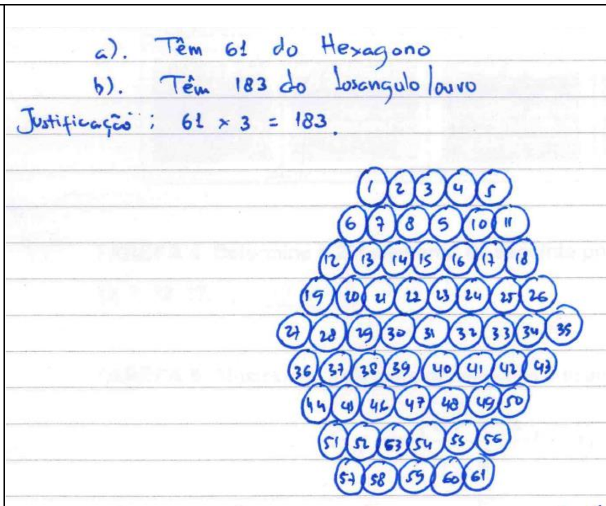
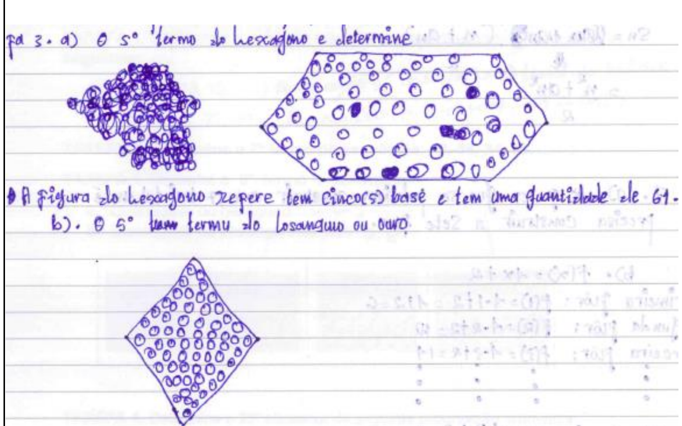
Configuração	*Número de hexágono*	*Números de losangos*
1	1	3 = 1 x 3
2	7	21 = 7 x 3
3	19	57 = 19 x 3
4	37	111 = 37 x 3
5	61	183 = 61 x 3
...	...	...
n	$U_n = 3n^2 + (-3)n + 1$	$U_n = (3n^2 + (-3)n + 1) \times 3$

Tabela 6: Grau de correção e método de solução relativamente às respostas dos estudantes na tarefa 3

Grau de correção	**Método de solução**	**Frequência**	**Percentagem %**
Resposta Correta	Tendência algébrica	0	0
	Tendência aritmética	11	44
	Observação figura	0	0
Resposta Errada	Tendência algébrica	0	0
	Tendência aritmética	0	0
	Observação figura	14	56
Total		25	100

Na tabela 6, mostra-se a dificuldade de estudantes no envolvimento dos objetos e dos processos algébricos. Todos os estudantes não conseguiram chegar à forma canónica de números dos hexágonos e dos losangos. 11 estudantes (44%) utilizaram uma construção e observação de figura para determinar os números de figuras geométricas. Outros estudantes (56 %) apresentam respostas erradas ou em branco,. Apresenta-se, no quadro 4, os exemplos das respostas dos estudantes relativamente à tarefa 3:

Quadro 4 : Exemplos de resoluções e análise dos níveis de RA relativamente à tarefa 3

<table>
<tr>
<td>A8</td>
<td>
</td>
<td>Resposta correta
Nível 1
- utiliza linguagem numérica, envolvendo a operação de multiplicação para justificar, aritmeticamente, a quantidade de losangos.;
- identifica a relação entre os elementos sucessivos de sequência;
- a configuração da resposta é Álgebra operacional.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação da figura.
Conceitos: padrão e sequencia
Proposição: A multiplicação de números do hexágonos com o 3 para determinar o numero de losangos.
Procedimentos:
- determinar o números hexágonos sucessivos;
- identifica que cada hexágono tem 3 losangos, por isso o numero de losangos é o triplo do número de hexágono.
Argumentos: baseia-se na contagem de número hexágonos e losangos.</td>
</tr>
<tr>
<td>A6</td>
<td></td>
<td>Resposta errada
Nível 0
- Não envolve símbolos algébricos nem soluções algébricas;
- Utiliza-se uma representação de uma figura;
- Realiza-se a contagem para determinar a quantidade de hexágono;
- A configuração da resposta é raciocínio visual;
- Comete erro na identificação do número de losangos</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e da representação figura; convenções assumidas para identificar os números de hexágonos</td>
</tr>
</table>

e losangos
Conceitos: padrão e sequência.
Procedimentos: desenhar as mesas sucessivamente e contar os números de hexágonos e losangos
Argumentos: baseia-se na contagem de número de hexágonos e losangos.

5 Conclusões

O objetivo deste trabalho esteve centrado em desenvolver um instrumento válido para caracterizar aspectos relativos ao RA na formação de professores. Este objetivo tem um foco em analisar o conhecimento dos professores em formação sobre os padrões figurativos no contexto de Timor. A configuração das tarefas desse trabalho foi baseada nas categorias do conteúdo algébrico e nas categorias do RA, tanto para o Ensino Básico como o Ensino Secundário.

No resultado desse estudo, identificamos as capacidades de estudantes no reconhecimento: o número de *tali tahan* para formar uma figura (88%); o padrão de mesas e de lugares (62%); e a soma de n termos sucessivos da progressão aritmética (44%). A construção da tabela de contagem é uma estratégia positiva para facilitar os estudantes identificaram o padrão de uma sequência.

Neste trabalho, notamos que a maioria dos estudantes apresentou dificuldade relativamente ao desenho da figura, comparando a ordem e a quantidade do losangos (56%). Identificamos, também, a dificuldade dos estudantes na tarefa do tipo da modelação matemática que envolveu a tradução da linguagem verbal para a linguagem matemática. Esta dificuldade mostrou-se pela falta de envolvimento dos processos matemáticos importantes tais como: compreender, traduzir da linguagem natural para linguagem matemática, descrever, resolver, interpretar e representar relações quantitativas. Por isso, considera-se a necessidade de que os estudantes tenham uma classe de intervenção sobre a modelagem matemática. Além disso, incrementar os seus conhecimentos sobre os conceitos de sequência e regularidade, equação, e função.

Identificou-se, também, algumas dificuldades dos futuros professores sobre o RA. Esta dificuldade mostra-se pela grande percentagem das respostas do baixo nível de algebrização. Neste caso, níveis 0 e 1, nas resolução de tarefas com o procedimento algébrico. Essa realidade vem de que os estudantes apenas utilizaram observação de figura para determinar os padrões em vez de envolveram os objetos e os processos algébricos.

Estes baixos níveis de raciocínio algébricas ter implicações para a formação de professores, tanto no ensino primário e secundário. Não é suficiente desenvolver propostas curriculares (NCTM, 2008), incluindo álgebra desde os primeiros níveis de ensino; é necessário que o professor tenha uma boa formação inicial e continuada a fim de a agir como agente principal da mudança na introdução e desenvolvimento do raciocínio algébrico nas salas de aula elementares, e sua progressão no ensino secundário. O reconhecimento de objetos e processos de pensamento algébrico pode ajudar a identificar características de práticas matemáticas em que os professores podem intervir para aumentar gradualmente os níveis de algebrização da atividade matemática dos alunos. Assim, o estudo sugere a necessidade dos futuros professores de matemática terem o conhecimento algébrico sobre padrões figurativos, em particular do contexto de Timor, na aprendizagem conceptual, valorizando o raciocínio algébrico.

BIBLIOGRAFIA

Aké, L. P. (2013). *Evaluación y Desarrollo del Razonamiento Algebrico Elemental en Maestros en Formación* (Tese de Doutoramento, Universidade de Granada). Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf

Barbosa, A. (2011). *Patterning problems: sixth graders' ability to generalize*. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, pp. 420-428. Rzeszow: ERME.

Barbosa, A., & Vale, I. (2013). A resolução de tarefas com padrões figurativos e a generalização. Ata de VII CIBEM. Acedido de: http://62.28.241.119/bitstream/20.500.11960/3865/1/_45_VIICIBEM-Barbosa_Vale-2013.pdf

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446. Acedido de: http://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning-1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlin: Springer. Acedido de: http://www.newbooks-services.de/MediaFiles/Texts/7/9783642177347_Excerpt_002.pdf

Bogdan, R., & Biklen, S.(2006). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora, Ed.

Borralho, A., & Barbosa, E. (2009). Borralho, A., & Barbosa, E. (2009). Pensamento Algébrico e exploração de Padrões. Encontro Nacional de Professores de Matemática. Viana do Castelo: APM. Acedido de: http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2009_14.pdf

Borralho, A., Cabrita, I., Palhares, P. e Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), Números e Álgebra (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE. Acedido de: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/1416/1/Padrões%20Caminha.pdf

Branco, N., & Ponte, J. P. (2011). Situações de modelação na formação inicial de professores. Ensino e aprendizagem da Álgebra: *Atas do EIEM*, 383-403. Acedido de: http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/22.Branco-Ponte.pdf

Cañadas, M. C. & Castro, E. (2005). Inductive reasoning in the justification of the result of adding two even numbers. Paper presented at the CERME 5, acedido de http://funes.uniandes.edu.co/1605/1/CERME5.pdf

Carmo, H., & Ferreira, M. (1998). *Metodologia da investigação: Guia para autoaprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* Vol. 2 (pp. 669–706). Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc. e NCTM.

Coutinho, C. P. (2013). *Metodologia de investigação em Ciencias Sociais e Humanas: teoria e prática.* Coimbra: Almedina.

Devlin, K. (2002). *Matemática a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Doerr, H. (2004). Teachers' knowledge and the teaching of algebra. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 265-290). Norwell: Klumer

dos Reis, J. P. C., da Silva, R. C., & dos Santos, G. M. T. (2021). Educação algébrica: o uso de padrões figurativo-numéricos como recurso didático-pedagógico para os anos finais do ensino fundamental. Brazilian Electronic Journal of Mathematics, 2. 4. Acedido de: https://www.google.com.br/url?esrc=s&q=&rct=j&sa=U&url=https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/article/download/57955/31340/258145&ved=2ahUKEwiH-u3urrSFAxU0S2cHHfI1A5EQFnoECAkQAg&usg=AOvVaw2Vqdwnb-1rksU3yTKjdCoj

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13–31. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino Union_020 2009.pdf

Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A., F. Blanco, T., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. & Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. Enseñanza de las Ciencias, 33.1 (pp. 127-150). Acedido de: https://www.researchgate.net/publication/282325947_Diseno_de_un_cuestionario_para_evaluar_conocimientos_didactico-matematicos_sobre_razonamiento_algebraico_elemental

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrizacíon de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formacíon de maestros. *Enseñanza de Las Ciencias, 32*(1), 199–219. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/niveles_algebrizacion.pdf

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrizacíon de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formacíon de maestros. *Enseñanza de Las Ciencias, 32*(1), 199–219. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/niveles_algebrizacion.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127–135. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ontosemiotic_approach.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127–135. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ontosemiotic_approach.pdf

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. & Contreras, A. (2015) Configuraciones de práticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. *Departamento de Didática da Matemática.* Universidade de Granada. Acedido de: https://www.researchgate.net/publication/282326039_Configuraciones_de_practicas_objetos_y_procesos_imbricadas_en_la_visualizacion_espacial_y_el_razonamiento_diagramatico

Góes, M. B. & Soares, M. M. D. (2010). Visualização: Relevância na educação Matemática e contribuição para o ensino/aprendizagem de arquitetura. In X Enem - Encontro Nacional de Educação Matemática - Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador, Bahia: SBEM, v. 1. (pp. 1-10).

Kaput, J. J. (1995). A research base for algebra reform: Does one exist. In *Proceedings of the 17th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 71-94).

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 145-168). Routledge. Acedido de: https://www.taylorfrancis.com/books/e/9781135676506/chapters/10.4324%2F9781410602619-16

Kaput, J.J (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning?. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151. Acedido de: https://www.researchgate.net/profile/Carolyn_Kieran/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it/links/53d6e3110cf220632f3df08a.pdf

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 47-70). Norwell, MA: Kluwer.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2008). Princípios e normas para matemática escolar. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional. (Tradução portuguesa da edição original de 2000).

Pimentel, T. (2011). Um programa de formação contínua e o desenvolvimento do pensamento algébrico de professores do 1.º ciclo do ensino básico. EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (Eds.), Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática, pp. 3–26. 7-8.

Ponte, J. P. da, & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225–263). New York, NY: Routldge.

Rivera, F. (2008). On the pitfalls of abduction: complexities and complicities in patterning activity. For the learning of mathematics, 28, 1 (march, 2008). FLM Publishing Association, Edmonton, Alberta, Canada. Acedido de: https://flm-journal.org/Articles/B2FC402116BF4341B985BAA4E46CA.pdf

Sampieri, R. H., Collado, C. F. e Lucio, P. B. (2013). *Metodologia de pesquisa.* 3ª edição. São Paulo: McGraw-Hill Intramericana Brasil Ltda.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NUMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 5-34. Acedido de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Apertura.pdf

Steen, L. (1988). The science of patterns. *Science*. 240. pp. 611-616. Acedido de: http://www.steen-frost.org/Steen/Papers/88sci_patterns.pdf

Suharman, L. Y. W (2018). O Raciocínio algébrico na formação inicial de professores em Timor – Leste. Tese de doutoramento. Universidade de Aveiro. Portugal.

Vale, I & Pimentel, T (2010). Raciocinar com padrões figurativos. Acedido de: https://eiem.spiem.pt/assets/files/eiem2013-GD1C7ValePimentel.pdf

Vale, I. (2013). Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. *REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática*, *8*(2), 64-81. Acedido de: http://funes.uniandes.edu.co/25595/1/Vale2013Padroe.pdf

Watson, A. (2007). Key Understanding of Mathematics Learning. *Paper 6: Algebraic Reasoning.* Nuffield Foundation. University of Oxford. Acedido de: http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/P6.pdf

Windsor, W. (2009). Algebraic Thinking- More to Do with Why, Than X and Y. *Proceedings of the 10th International Conference "Models in Developing Mathematics Education".* The Mathematics Education into the 21st Century Project. Acedido de: http://www.qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/8114/Proceedings-636pages-Dresden2009_592-595.pdf